PT Programme de Colles
Semaine 18

Intégrales à paramètre

- Fonction définie par une intégrale
- Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :
  — pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
  — pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
  — il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

  alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.
- Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :
  — pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
  — pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
  — pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A ;
  — il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;

  alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et vérifie :
$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$
- Remarque : le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.

Isométries d'un espace euclidien

- Isométries d'un espace euclidien, Groupe orthogonal d'un espace euclidien E
- Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.
- Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie vectorielle
- Matrices orthogonales. Groupe orthogonal. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
- Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée
- Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle. Isométrie vectorielle directe, isométrie vectorielle indirecte.
- Isométries vectorielles en dimension 2 :
  — Orientation d'un plan euclidien de dimension 2. Base directe, base indirecte.
  — Description des matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
  — Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.
  — Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

- Isométries vectorielles en dimension 3 :
  — Orientation d'un espace euclidien de dimension 3. Base directe, base indirecte. Orientation d'une droite, d'un plan d'un espace orienté.
  — Rotation et antirotation vectorielles d'axes orientés et d'angles donnés. Symétries orthogonales. Matrices dans une base adaptée.
  — Réduction en base orthonormée d'une isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 3. Les étudiants doivent savoir déterminer l'axe et l'angle de la rotation ou de l'antirotation